

Неизомагнитные полуахроматы с малым эмиттансом

И.Л. Жогин (Новосибирск)¹

Аннотация

Рассматриваются полуахроматические решетки (с распределенной дисперсией: небольшая дисперсия допускается в прямолинейных промежутках между ячейками), составленные из дипольных магнитов с неодинаковым полем (два типа диполей).

Минимизация *эффективного* горизонтального эмиттанса проводится по следующему алгоритму. (1) Для каждого не концевой магнита минимизируется его вклад в *естественный* эмиттанс по всем оптическим параметрам (связанным с дисперсионной и бета-функцией), кроме *смещения*, задающего сдвиг точки минимума бета-функции от центра магнита; для концевой магнита минимизируется его вклад в некий интеграл, связанный с эффективным эмиттансом. (2) На *свободные* параметры диполей (кривизна, угол поворота, смещение) накладываются *условия сшивки* – равенство инвариантов Куранта-Снайдера на выходе из магнита и на входе в следующий. (3) Находится минимум по оставшимся свободным параметрам.

Точность алгоритма падает с уменьшением числа внутренних диполей в ячейке. И все же изомагнитный минимум Танаки–Андо (ТА) для модифицированной решетки DBA* (где нет внутренних диполей) воспроизводится с точностью лучше процента. Среди решеток с ячейкой не более чем из четырех диполей наименьшее значение эффективного эмиттанса (на 14% ниже ТА-предела) достигается для решетки QBA**, в которой все диполи имеют ненулевое смещение.

Key words: effective emittance reduction, storage ring, nonisomagnetic lattice, Courant-Snyder invariant

PACS:

1. Введение

Растущие потребности пользователей синхротронного излучения (СИ) приводят к необходимости дальнейшего улучшения параметров специализированных источников СИ. Одним из важнейших параметров является горизонтальный электронный эмиттанс ϵ_x (от него, через коэффициент связи, зависит и вертикальный эмиттанс). Его значение зависит от магнитной структуры (или решетки) накопительного кольца, и прежде всего – от параметров и расстановки дипольных магнитов, которые обеспечивают

замкнутость орбиты электронов. Для ахроматических решеток DBA (double bend achromat – два диполя в ячейке), ТВА, QBA, ячейки которых соединены прямолинейными участками с нулевой дисперсионной функцией, известны условия минимизации естественного эмиттанса [1,2]; с ростом числа дипольных магнитов в кольце эмиттанс уменьшается,

$$\epsilon_x \propto N^{-3},$$

но при этом растут размеры и стоимость накопительного кольца.

Для яркости вставных источников СИ важен, однако, эффективный эмиттанс, который прямо зависит от дисперсионной функции (инварианта Куранта-Снайдера) в области вставки. Оказывается, эффективный эмиттанс можно уменьшить,

Email address: zhogin@mail.ru (И.Л. Жогин (Новосибирск)).

¹ Corresponding author. Tel.: +7 9134531870

если ослабить требование бездисперсионности [3,4]. Поэтому оптика некоторых колец (Elettra, ESRF), первоначально ахроматичная, типа DBA, была модифицирована (решетка с распределенной дисперсией, или полуахромат DBA*).

Для дальнейшего уменьшения эмиттанса в ESRF, наряду с увеличением числа дипольных магнитов от 64 до 128, обсуждается и возможность использования дипольных магнитов с полем, изменяющимся вдоль его длины [3,5].

В этой работе задача уменьшения эффективного эмиттанса решается для случая, когда ячейка симметрична (относительно отражения в ее центре) и состоит из магнитов двух типов: внутренние диполи M_0 и пара боковых диполей M_1 ; полное число магнитов в ячейке $m = m_0 + 2$. Модифицированным решеткам ТВА* и DBA* отвечает выбор $m_0 = 1$ и $m_0 = 0$, соответственно. В случае $m_0 = 2$ внутренние диполи могут иметь ненулевое смещение; этот случай будем обозначать как QBA**.

Диполи с неодинаковым полем имеют максимум излучения в разных местах спектра, и каждый тип оптимален для своей области спектра и своего класса пользователей. Однако, большое число свободных параметров, определяющих неизомагнитную ячейку, делает очень сложным поиск наилучших параметров, при которых эффективный эмиттанс минимален. Здесь предлагается возможный способ, алгоритм решения, который разбивает эту задачу на более простые части. В принципе, этот подход позволяет рассматривать и более сложные решетки, с тремя или даже четырьмя типами диполей.

2. Эффективный эмиттанс

Горизонтальный эмиттанс электронного пучка ϵ_x и эффективный эмиттанс ϵ_{eff} определяются следующими выражениями, связанными с интегралами по орбите (зависят от радиуса орбиты ρ и оптических функций, в т.ч. β -функции) [2,3,4]:

$$\epsilon_x = C_q \gamma^2 \varepsilon_x, \quad \varepsilon_x = \frac{I_5}{J_x I_2} = \frac{I_5}{I_2 - I_4}, \quad (1)$$

$$\epsilon_{\text{eff}} = C_q \gamma^2 \varepsilon_{\text{eff}}, \quad \varepsilon_{\text{eff}}^2 = \varepsilon_x \left(\varepsilon_x + \frac{H_{\text{ID}} I_3}{2I_2 + I_4} \right). \quad (2)$$

Здесь γ – релятивистский фактор,

$$C_q = 3.84 \times 10^{-13} \text{ м}, \quad C_q \gamma^2 = 1470 \text{ нм} (E[\text{GeV}])^2;$$

введены интегралы по кольцу

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint \rho^{-2} ds, \quad I_4 = \oint \eta \rho^{-3} (1 + 2k\rho^2) ds, \\ I_3 &= \oint |\rho|^{-3} ds, \quad I_5 = \oint |\rho|^{-3} H ds; \end{aligned} \quad (3)$$

H_{ID} в (2) это инвариант Куранта–Снайдера в точке (или в области) вставки,

$$H = \beta^{-1} \{ \eta^2 + (\alpha\eta + \beta\eta')^2 \}, \quad (4)$$

$\alpha = -\frac{1}{2}\beta'$; η – дисперсионная функция.

Некоторые кольца, источники СИ, проектировались так, чтобы области вставных устройств имели нулевой инвариант H_{ID} (т.е. нулевую дисперсионную функцию и ее производную), но затем параметры были изменены для лучшей минимизации эффективного эмиттанса (2).

Интеграл I_4 мал по сравнению с I_2 и можно им пренебрегать, если используются магниты с отдельными функциями (в диполях нет квадрупольной компоненты, и $k = 0$).

Итак, нам нужно минимизировать следующую комбинацию кольцевых интегралов

$$\varepsilon_{\text{eff}}^2 = \frac{I_5 I_6}{I_2^2} = \frac{I_5 (I_5 + H_{\text{ID}} I_3 / 2)}{I_2^2}; \quad (5)$$

и здесь следует заметить, что интегралы I_2 и I_3 зависят только от поля в магнитах (радиуса орбиты), но не зависят от бетатронных и дисперсионных функций. Интегралы же I_5 и $I_6 = I_5 + H_{\text{ID}} I_3 / 2$ являются суммами положительных вкладов от каждого магнита (т.к. инвариант Куранта–Снайдера всегда положителен).

Поэтому задачу оптимизации можно попробовать разбить на несколько относительно простых шагов, или факторизовать:

(1) Сперва минимизируем вклад каждого магнита в I_5 по параметрам β_0, η_0, η'_0 , т.е. это значение минимума бета-функции и дисперсионные функции в этой точке минимума (эта точка служит началом отсчета орбиты s в диполе); для концевых магнитов, которые граничат с местом вставки и непосредственно определяют H_{ID} , минимизируем их вклад в интеграл $I_5 + I_6$, так как это наилучшим образом *аппроксимирует* минимизацию произведения $I_5 I_6$.

(2) Свободные параметры диполей, кривизна ρ^{-1} , длина диполя или угол поворота, $l = \vartheta\rho$, а также координата центра диполя s_0 или *смещение* $x = -2s_0/l$, должны быть ограничены условиями сшивки, выражающими равенство инвариантов Куранта–Снайдера на выходе из диполя

и на входе в следующий. Сюда же добавляется условие замкнутости орбиты (сумма углов ϑ всех магнитов равна 2π).

(3) После исключения углов, можно проводить минимизацию эффективного эмиттанта по оставшимся параметрам (двум или трем):

$$\kappa = \rho_1/\rho_0, \quad x = x_0, \quad y = x_1$$

(внутренние магниты могут иметь ненулевое смещение x_0 , если их число равно двум).

Известно, что вклад дипольного магнита в эмиттанс минимален тогда, когда его центр совпадает с минимумом бета-функции (этот минимум и параметры дисперсионной функции должны, кроме того, иметь определенные значения, зависящие от поля магнита [1,2]). Такой магнит будем называть симметричным (находится в симметричной позиции), или несмещенным; в противном случае будем говорить о магните со смещением.

Обычно решетки состоят из повторяющихся одинаковых наборов магнитов, ячеек или периодов (или суперпериодов). Мы рассмотрим довольно общий случай периодической решетки из n симметричных ячеек (плоскость отражения в центре ячейки). Каждая ячейка содержит m дипольных магнитов, в том числе $m_0 = m - 2$ внутренних магнита M_0 (симметричных, то есть с нулевым смещением), и по бокам два магнита M_1 , со смещением x_1 . Рассматривая правую половину ячейки, мы будем подразумевать, что смещения боковых магнитов положительны (в левой половине смещения отрицательны). Полное число диполей $N = n \cdot m$; их углы поворота, ϑ_0, ϑ_1 , должны удовлетворять условию

$$\sum \vartheta_i = n(m\vartheta_0 + 2\vartheta_1) = 2\pi. \quad (6)$$

Введем обозначение для среднего угла $\bar{\vartheta} = 2\pi/N$.

3. Минимизации вклада в эмиттанс внутреннего (не конечного) диполя

Пусть дипольный магнит имеет длину $l = \rho\vartheta$, и координата его центра (от точки минимума бета-функции) равна $s_0 = -xl/2$.

Следуя Тенгу [1], можно записать вклад магнита в интеграл I_5 , а также инвариант Куранта на правом и левом краях магнита H_{\pm} , следующим образом (см. выражения (9)–(11) из [1]):

$$H_{\pm} = \beta_0(\eta'_0 + \sin \varphi_{\pm})^2 + \frac{\rho^2}{\beta_0} \left(1 - \frac{\eta_0}{\rho} - \cos \varphi_{\pm}\right)^2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta I_5 = \frac{1}{\rho^3} \int_{s_-}^{s_+} H ds = \frac{\vartheta\beta_0}{\rho^2} [A + D + (\eta'_0 + E \sin \varphi_0)^2] \\ + \frac{\vartheta}{\beta_0} [A - D + (1 - \frac{\eta_0}{\rho} - E \cos \varphi_0)^2], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{где } s_{\pm} = s_0 \pm \frac{l}{2}, \quad \varphi_{\pm} = \frac{s_{\pm}}{\rho}, \quad \varphi_0 = \frac{s_0}{\rho} = -\frac{x\vartheta}{2},$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \approx \frac{\vartheta^2}{4!} - \frac{\vartheta^4}{6!}, \\ B = \frac{1}{2} - A - \frac{\sin \vartheta}{2\vartheta} \approx \frac{\vartheta^2}{4!} - \frac{2\vartheta^4}{6!}, \\ D = B \cos 2\varphi_0 \approx \frac{\vartheta^2}{24} \left[1 - \frac{\vartheta^2}{30}(2 + 15x^2)\right], \\ E = \frac{\sin(\vartheta/2)}{\vartheta/2} \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{24} + \frac{\vartheta^4}{16 \cdot 5!}. \end{cases} \quad (9)$$

Последнее слагаемое в последнем уравнении добавлено, чтобы показать как быстро падает вклад следующих членов ряда. Предполагается, что углы ϑ_i малы (для всех диполей накопителя), и уже первые члены разложения по углам дают достаточную точность.

Минимизация выражения (8) по параметрам η_0, η'_0 достигается, если эти параметры удовлетворяют следующим условиям [1]:

$$\begin{cases} \eta'_0 = -E \sin \varphi_0 \approx \frac{x\vartheta}{2}, \\ \eta_0 = \rho - \rho E \cos \varphi_0 \approx \rho\vartheta^2 \frac{1 + 3x^2}{24}. \end{cases} \quad (10)$$

Вклад диполя в интеграл принимает вид

$$\Delta I_5 = \frac{\vartheta}{\rho} \left\{ \frac{\beta_0}{\rho} (A + D) + \frac{\rho}{\beta_0} (A - D) \right\};$$

минимизация по параметру β_0 теперь дает

$$\beta_0^2 = \rho^2 \frac{A - D}{A + D} \approx \rho^2 \vartheta^2 \frac{1 + 15x^2}{60}, \quad (11)$$

$$\Delta I_5^{(\min)} = \frac{2\vartheta}{\rho} \sqrt{A^2 - D^2} \approx \frac{\vartheta^4 \sqrt{1 + 15x^2}}{12\sqrt{15}\rho}. \quad (12)$$

С учетом условий (10), (11), уравнение (7) принимает следующий вид:

$$H_{\pm} \approx \rho\vartheta^3 \frac{4 \mp 15x + 45x^2}{12\sqrt{15}\sqrt{1 + 15x^2}}. \quad (13)$$

При $x = 0$ получаем выражения для центрального магнита (случай А у Тенга). Решетка, составленная из N таких магнитов (пусть $\rho = 1$, тогда $I_2 = I_3 = N\vartheta$, $I_5 = N\Delta I_5$), соответствует минимуму естественного эмиттанта,

$$\varepsilon_0 = \frac{\bar{\vartheta}^3}{12\sqrt{15}} \left(= \frac{I_5}{I_2} \right); \quad \bar{\vartheta} = \frac{2\pi}{N} (= \vartheta); \quad (14)$$

эффективный эмиттанс этой решетки равен $3\varepsilon_0$.

Удобно измерять эмиттанс в единицах ε_0 , введя безразмерные параметры f, g . Известно [2], что для решетки DBA

$$f \equiv \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0} = 3, \quad g \equiv \frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_0} = 3.$$

Диполи решетки DBA имеют смещение $x = \frac{1}{4}$; если для этого x использовать значения (10)–(13), то можно получить (эффективный эмиттанс такой полуахроматической решетки уменьшается по сравнению с DBA) $f = \frac{\sqrt{31}}{4}$, $g = \frac{111}{8\sqrt{31}} \approx 2.49$.

В точке минимума $H_+(x)$ из (13), $x = 0.229$ (это корень уравнения $45x^3 + 2x = 1$), эффективный эмиттанс еще немного уменьшается: $g = 2.43$. Однако более правильным для DBA* будет иной способ выбора оптических параметров – как для концевых диполей.

4. Минимизации вклада в эффективный эмиттанс концевых диполей

Пусть интеграл по всем диполям в ячейке, кроме крайних, концевых, равен I_5^* , а вклад концевых равен ΔI_5 . Учитывая уравнение (5), имеем

$$\begin{aligned} \Delta(I_5 I_6) &= n^2(I_5^* + 2\Delta I_5)(I_5^* + 2\Delta I_6) - n^2(I_5^*)^2 \\ &\approx 2n^2 I_5^* (\Delta I_5 + \Delta I_6) \propto 2\Delta I_5 + JH_+/2. \end{aligned}$$

Здесь $J = I_3/(2n)$ – интеграл по полуячейке, n – число ячеек. Используя (7)–(9), получаем выражение, которое нужно минимизировать (по параметрам диполя η_0, η'_0, β_0 ; на время примем $\rho = 1$):

$$\begin{aligned} \Delta I_5 + \Delta I_6 &= 2\vartheta\beta_0[A + D + (\eta'_0 + E \sin \varphi_0)^2] \\ &+ \frac{2\vartheta}{\beta_0}[A - D + (1 - \eta_0 - E \cos \varphi_0)^2] \quad (15) \\ &+ \frac{J\beta_0}{2}(\eta'_0 + \sin \varphi_+)^2 + \frac{J}{2\beta_0}(1 - \eta_0 - \cos \varphi_+)^2. \end{aligned}$$

Приравняв нулю производные по η'_0 и η_0 , можно найти значения параметров, при которых достигается минимум (восстанавливаем ρ):

$$\begin{cases} \eta'_0 \approx \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{4y\vartheta - J\rho^2(1-y)}{4\vartheta + J\rho^2}, \\ \eta_0 \approx \frac{\rho\vartheta^2}{24} \cdot \frac{4\vartheta(1+3y^2) + 3J\rho^2(1-y)^2}{4\vartheta + J\rho^2}; \end{cases} \quad (16)$$

здесь y – смещение концевых диполей. После подстановки этих значений в (15) можно получить:

$$\begin{aligned} \Delta I_5 + \Delta I_6 &= \frac{\vartheta^3}{6} \left\{ 4b_0 \frac{\vartheta + J}{4\vartheta + J} \right. \\ &+ \left. \frac{\vartheta^2}{60\beta_0} \left[1 + 15y^2 + \frac{5J(1-3y)^2}{4\vartheta + J} \right] \right\}; \quad (17) \end{aligned}$$

минимум достигается, если (восстанавливаем ρ)

$$\beta_0^2 = \rho^2 \vartheta^2 \frac{2\vartheta(1+15y^2) + 3J\rho^2(1-5y+10y^2)}{120(\vartheta + J\rho^2)}. \quad (18)$$

Инвариант на краях принимает вид

$$\begin{aligned} H_{\pm} &= \frac{\beta_0 \vartheta^2}{4} \left[\frac{4\vartheta + J \mp J}{4\vartheta + J} \right]^2 \\ &+ \frac{\vartheta^4}{9\beta_0} \left[\frac{\vartheta \mp 3y\vartheta + (3 \mp 3)yJ/4}{4\vartheta + J} \right]^2. \quad (19) \end{aligned}$$

В принципе, теперь все готово для завершающей минимизации: кроме уравнений (17)–(19) надо учесть, что $\Delta I_6 - \Delta I_5 = JH_+/2$.

5. Минимизация для решетки DBA*

Чтобы проверить корректность уравнений предыдущего раздела, рассмотрим простейшую полуахроматическую решетку с двумя магнитами в ячейке. В этом случае (в этом разделе $\rho = 1$)

$$J \equiv I_3/N = \vartheta = \bar{\vartheta},$$

и из уравнений (16)–(19) следует

$$\begin{cases} \eta'_0 = \vartheta \frac{5y-1}{10}, \quad \eta_0 = \vartheta^2 \frac{7-6y+15y^2}{120}, \\ \beta_0 = \frac{\vartheta \sqrt{1-3y+12y^2}}{4\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$\Delta I_5 + \Delta I_6 = 2\vartheta^4 \frac{\sqrt{1-3y+12y^2}}{15\sqrt{3}},$$

$$H_+ = \vartheta^3 \frac{7-33y+72y^2}{75\sqrt{3}\sqrt{1-3y+12y^2}}.$$

В итоге находим выражения для безразмерных эмиттансов (естественного и эффективного, соответственно), см. (14):

$$f = \frac{\Delta I_5}{\vartheta \varepsilon_0} = \frac{13 - 27y + 168y^2}{5\sqrt{5-15y+60y^2}}, \quad g^2 = \frac{\Delta I_5 \Delta I_6}{\vartheta^2 \varepsilon_0^2}, \quad (20)$$

$$g^2 = \frac{3(13 - 27y + 168y^2)(9 - 31y + 104y^2)}{125(1 - 3y + 12y^2)}.$$

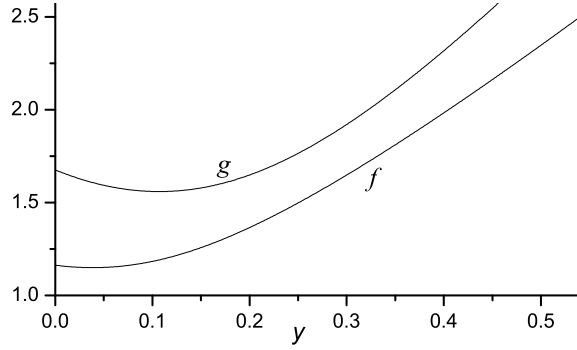


Рис. 1. Нормированный эмиттанс решетки ДВА*: f – естественный, g – эффективный.

Соответствующие графики показаны на рис. 1. Минимум эффективного эмиттанса достигается при $y = 0.107$, и $g_{\min} = 1.559$. Таким образом, предлагаемый алгоритм минимизации с точностью лучше половины процента воспроизводит минимум Танаки–Андо [4], равный 1.552.

В следующем разделе будут рассматриваться более сложные решетки, когда в ячейке есть внутренние диполи, с нулевым смещением.

6. Решетки ТВА*, QBA* et cet.

Пусть m_0 – число внутренних диполей, а $m = m_0 + 2$ – полное число диполей в ячейке. Используем безразмерные параметры

$$q = \vartheta_1 / \bar{\vartheta}, \quad p = \vartheta_0 / \vartheta_1, \quad \kappa = \rho_1 / \rho_0,$$

и положим $\rho_1 = 1$ (единица длины). Будем также опускать в уравнениях средний угол (т.е. формально $\bar{\vartheta} = 1$), т.к. он не войдет в безразмерный эмиттанс, f и g .

Все равно нельзя в явном виде получить $g(y, \kappa; m_0)$, но можно найти эту функцию численно, по следующему алгоритму.

Замкнутость орбиты и первые интегралы по полуячейке, нормированные на ϑ_1 , см. (3):

$$q = \frac{m}{m_0 p + 2}, \quad i_2 = I_2 / (2n\vartheta_1) = 1 + \frac{m_0}{2} p \kappa,$$

$$j = J / \vartheta_1 = I_3 / (2n\vartheta_1) = 1 + \frac{m_0}{2} p \kappa^2. \quad (21)$$

Таблица 1
Параметры полуахроматов mBA*

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_{\min}	1.559	1.435	1.353	1.297	1.257	1.226	1.202	1.182	1.166
f	1.191	1.207	1.196	1.182	1.169	1.156	1.146	1.136	1.128
y	0.107	0.157	0.185	0.203	0.215	0.224	0.231	0.236	0.240
κ	–	0.850	0.835	0.830	0.831	0.832	0.835	0.839	0.843
p	–	1.134	1.170	1.198	1.222	1.241	1.258	1.272	1.285

Из уравнения (18) получим (также нормируем)

$$b = \frac{\beta_0^{(1)}}{\vartheta_1} = \sqrt{\frac{2 + 30y^2 + 3j(1 - 5y + 10y^2)}{120(1 + j)}}.$$

Таким же образом преобразуем (19) и (17):

$$h_{\pm} = \frac{H_{\pm}^{(1)}}{\vartheta_1^4}, \quad s = \frac{\Delta I_5^{(1)} + \Delta I_6^{(1)}}{\vartheta_1^4} = \frac{4b(1 + j)}{3(4 + j)}.$$

Условие сшивки $H_+^{(0)} = H_-^{(1)}$ дает

$$\frac{p^3}{3\sqrt{15}\kappa} = b \frac{(2 + j)^2}{(4 + j)^2} + \frac{(2 + 6y + 3jy)^2}{36b(4 + j)^2} (= h_-). \quad (22)$$

Уравнение (22) с учетом (21) можно решить численно, и найти единственное решение $p(y, \kappa; m_0)$. Теперь определяется $b(y, \kappa; m_0)$ (т.е. минимум бета-функции концевго диполя $\beta_0^{(1)}$), и можно, наконец, вычислить f и g :

$$i_5 = \frac{I_5}{2n\vartheta_1} = \frac{q^3}{4} (2m_0 \varepsilon_0 p^4 \kappa + 2s - jh_+), \quad (23)$$

$$f = \frac{i_5}{\varepsilon_0 i_2}, \quad g^2 = f \left(f + \frac{q^3 j h_+}{2i_2 \varepsilon_0} \right); \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{12\sqrt{15}}. \quad (24)$$

На рис. 2 показана область минимума эффективного эмиттанса, $g(y, \kappa)$, для решетки ТВА*. В Таблице приведены параметры, включая естественный эмиттанс, для полуахроматов mBA* вплоть до $m = 10$.²

7. Решетка QBA**

Если $m = 4$, четыре диполя в ячейке, внутренние диполи тоже могут иметь ненулевое смещение, $x_0 = x$ (у боковых смещение $x_1 = y$). Тогда в уравнении (22) нужно изменить левую часть, следуя уравнению (13):

$$\frac{p^3(4 - 15x + 45x^2)}{12\kappa\sqrt{15}\sqrt{1 + 15x^2}} = h_-(j, y).$$

² Относящиеся к расчетам m-файлы можно найти на сайте zhogin.narod.ru

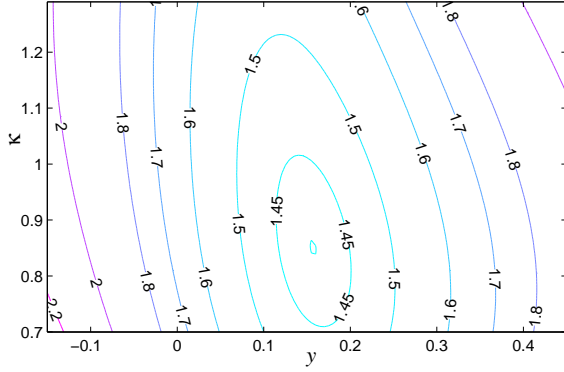


Рис. 2. Эффективный эмиттанс $g(\kappa, y)$ для решетки ТВА*.

Кроме того, в выражении для i_5 , уравнение (23), меняется вклад внутренних диполей [см. (12)]:

$$i_5 = \frac{q^3}{4} (2m_0 \varepsilon_0 p^4 \kappa \sqrt{1 + 15x^2} + 2s - jh_+).$$

Теперь нам нужно найти минимум функции трех переменных, $g(y, x, \kappa)$. Можно рассматривать двумерные срезы, для разных значений κ , и находить минимальное значение $g_{\min}(\kappa)$; график этой функции можно видеть на рис. 3.

На рис. 4 показана область минимума g для случая $\kappa = 0.74$ (можно сравнить с рис. 2). Сам минимум, $g_{\min} = 1.345$, достигается при $y = 0.181$, $x = 0.046$; при этом $p = 1.184$.

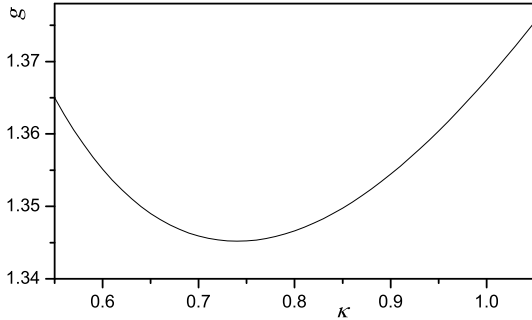


Рис. 3. Решетка QBA**: эмиттанс g_{\min} от $\kappa = \rho_1/\rho_0$.

8. Заключение

Неизомагнитные решетки с двумя типами магнитов, ТВА*, QBA*, и особенно QBA**, позволяют несколько уменьшить эффективный эмиттанс, ниже минимума Танаки–Андо $g_{\min} = 1.552$; в случае QBA** – вплоть до $g_{\min} = 1.345$. Интересно, что новый минимум достигается тогда, когда поле у внутренних диполей меньше, чем

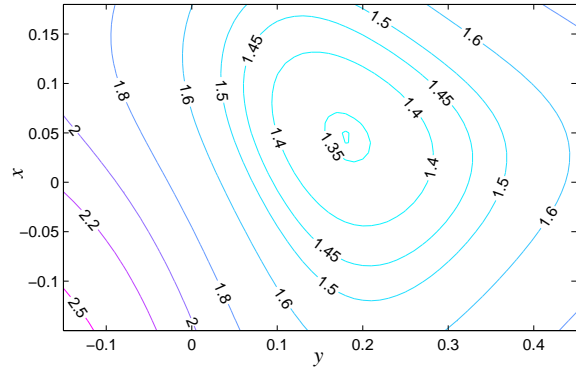


Рис. 4. QBA**: область минимума $g(y, x)$ для $\kappa = 0.74$.

у концевых, на уровне 74%; поэтому возможны варианты, когда внутренние магниты имеют квадрупольную и/или октупольную компоненту. Можно рассматривать более сложные решетки, с тремя типами магнитов; условие сшивки между внутренними диполями гораздо проще, чем между внутренним и концевым.

Область минимума имеет понятные преимущества, в ней больше устойчивость и меньше влияние разных отклонений, погрешностей изготовления и установки, поскольку малы градиенты по всем параметрам.

Предложенный алгоритм минимизации имеет эвристический характер, и можно его еще немного усложнить. Для концевых магнитов, вместо суммы $2\Delta I_5 + H_+ J/2$, можно минимизировать более общую линейную комбинацию $2\Delta I_5 + \lambda H_+ J$; дополнительный параметр $\lambda \approx 0.5$ подбирается, чтобы минимум g_{\min} был глубже.

Выражаю благодарность К. В. Золотареву, привлечшему мое внимание к этой задаче, за интерес к работе и ряд замечаний.

Список литературы

- [1] L.C. Teng, *Minimum emittance lattice for synchrotron radiation storage rings*, Internal report LS-17, ANL 1985
- [2] S.Y. Lee, *Emittance optimization in three- and multiple-bend achromats*, Phys. Rev. E **54**, 1940 (1996).
- [3] A. Ropert, P. Elleaume, L. Farvacque, Y. Papaphilippou, T. Perron, *Prospects for a long-term lattice upgrade at the ESRF*, EPAC04.
- [4] H. Tanaka and A. Ando, *Minimum Effective Emittance in Synchrotron Radiation Sources*, Nucl. Instr. Meth. **A369** (1996) 312–321.
- [5] Y. Papaphilippou and P. Elleaume, *Analytical considerations for reducing the effective emittance with variable dipole field strengths*, PAC 2005.